## 2. Rechenregeln für den Logarithmus

**Beispiel 1:**

**1)** $\log_2 4 = \log_2(2^2) = 2;$ **2)** $\log_2 8 = \log_2(2^3) = 3;$
**3)** $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2(2^2 \cdot 2^3) = \log_2(2^{2+3}) = 2 + 3.$
Aus **1)**, **2)** und **3)** erhält man: $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8.$

Das Ergebnis dieses Beispiels läßt sich verallgemeinern zu

> **Satz 160.1:** Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Faktoren.
> Für $u > 0$, $v > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ gilt also:
> $$\boldsymbol{\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v}$$

**Beweis:** Mit $x := \log_b u$ und $y := \log_b v$ gilt $b^x = u$ und $b^y = v$.
Also ist $u \cdot v = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$ und damit
$\log_b(u \cdot v) = \log_b(b^{x+y}) = x + y$, d.h. $\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v.$

Satz 160.1 gilt natürlich auch für Produkte mit mehr als zwei Faktoren; z.B. ist

$$\begin{aligned}\log_b(u \cdot v \cdot w) &= \log_b(u \cdot (v \cdot w)) = \\ &= \log_b u + \log_b(v \cdot w) = \\ &= \log_b u + \log_b v + \log_b w.\end{aligned}$$

Ganz analog zu Satz 160.1 läßt sich auch eine Rechenregel für den Logarithmus eines Quotienten aufstellen:

> **Satz 160.2:** Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus den Logarithmen von Dividend und Divisor.
> Für $u > 0$, $v > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ gilt also:
> $$\boldsymbol{\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v}$$

Den **Beweis** kannst du leicht selbst durchführen (Aufgabe 161/1).

**Bemerkung:** In den Formeln von Satz 160.1 und 160.2 ist die linke Seite auch noch definiert, wenn $u$ und $v$ beide negativ sind, die rechte dagegen nicht mehr. Die folgende Form dieser Formeln erfaßt jedoch auch diesen Fall:

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b|u| + \log_b|v| \quad \text{bzw.} \quad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b|u| - \log_b|v|.$$

**Beispiel 2:**

**1)** $\log_3 9 = \log_3(3^2) = 2;$
**2)** $\log_3(9^5) = \log_3[(3^2)^5] = \log_3(3^{2 \cdot 5}) = 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$
Aus **1)** und **2)** erhält man: $\log_3(9^5) = 5 \cdot \log_3 9.$

Auch dieses Ergebnis läßt sich verallgemeinern zu

> **Satz 161.1:** Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis.
> Für $u > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ und $\varrho \in \mathbb{R}$ gilt also:
> $$\boldsymbol{\log_b u^\varrho = \varrho \cdot \log_b u}$$

**Beweis:** Mit $x := \log_b u$ gilt $b^x = u$ und damit $u^\varrho = (b^x)^\varrho = b^{\varrho x}$.
Daher ist $\log_b u^\varrho = \log_b(b^{\varrho x}) = \varrho \cdot x$, also $\log_b u^\varrho = \varrho \cdot \log_b u$.

**4.** Fasse zu einem einzigen Logarithmus zusammen:

**a)** $\log_a 2 + \log_a 3$ **b)** $\log_a 5 - \log_a 7$ **c)** $\log_a 1 - \log_a 11 + \log_a 2$
**d)** $2\log_a 16 - \log_a 8$ **e)** $3\log_a 2 + \log_a 4$ **f)** $\log_a \sqrt[5]{243} - \log_a 6 + \log_a 2$

**5.** Alle Variablen vertreten positive Zahlen. Vereinfache:

**a)** $\log_a u^3$ **b)** $\log_a 2c^4$ **c)** $\log_a\left(\frac{3}{vw}\right)^3$ **d)** $\log_a\left(\frac{u^2 v}{(2w)^3}\right)$
**e)** $\log_a \sqrt[4]{u}$ **f)** $\log_a \sqrt[6]{\frac{u^5}{v}}$ **g)** $\log_a\left(\frac{1}{\sqrt[3]{r^2 st}}\right)$ **h)** $\log_a\left(\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[4]{2q}\right)^2$

**6.** Sind die folgenden Terme äquivalent?

**a)** $\log_b x + 2$ und $\log_b(x + 2)$ **b)** $\log_b a^2$ und $(\log_b a)^2$
**c)** $\log_b(a^2)^3$, $(\log_b a^2)^3$ und $[(\log_b a)^2]^3$

**7.** Fasse zusammen:

**a)** $2\log_a m + 3\log_a n$ **b)** $0{,}5\log_a p^3 - \log_a\left(\frac{p^2}{\sqrt{q}}\right)$
**c)** $2\log_a(c^2\sqrt{cd}) - 4\log_a\left(\frac{c}{d^2}\right)$ **d)** $\log_a c + 1$
**e)** $2 - \log_a(u^2 v)$ **f)** $\frac{1}{2}(\log_a m^2 n - 3) - \left(0{,}5 - \log_a\frac{\sqrt{n}}{m}\right)$